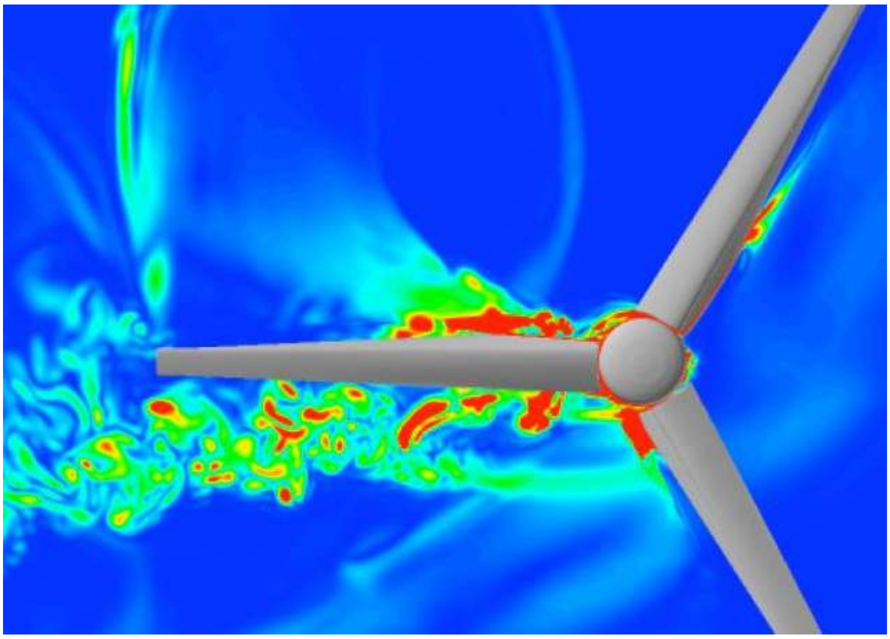


كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم القوى الميكانيكية

ميكانيك السوائل 2

تحريك السوائل المثالية غير القابلة للانضغاط

الدكتور المهندس
سعيد شقير

محتوى العرض

- ❖ مقدمة
- ❖ قوانين التحريك الأساسية للجريانات وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)
- ❖ معادلة اويلر الحركية في اتجاه الجريان
- ❖ معادلة اويلر الحركية ناضمياً على اتجاه الجريان
- ❖ معادلة برنولي
- ❖ معادلة برنولي العامة وحيدة البعد
- ❖ معادلة برنولي للجريانات غير المستقرة

مقدمة

- أن **الدراسة الحركية للسوائل** تتحدد بواسطة قيم هندسية وحركية بحته مثل الاحداثيات الديكارتية أو الاحداثي المنحني s , مساحة مقطع الجريان A و السرعة V, التسارع b.
- بالمقابل تهدف **الدراسة التحريكية للسوائل** الى:
  - ✓ معرفة القوى المؤثرة على جزيئات السائل التي سببت حالتها الحركية .
  - ✓ معرفة القوى والعزوم التي يؤثر بها السائل على حدود جملة الجريان , التي تشكلها في الحالة العامة الجدران الصلبة التي يجري السائل حولها أو في داخلها , ويتم حساب هذه القوى بمساعدة المعادلات والقوانين الأساسية للتحريك.
- سندرس أولا تحريك السوائل المثالية غير القابلة للإنضغاط ($\rho = const$), حيث نفرض أن اللزوجة معدومة ($\eta=0$) وبالتالي قوى الاحتكاك المماسية معدومة . وتكون جزيئات السائل معرضة لتأثير قوى الضغط الناظمية والقوى الحجمية (الكتلية).
- وسنبدأ كالعادة بدراسة الجريانات البسيطة وحيدة البعد كمقدمة لدراسة الجريانات العامة ثنائية وثلاثية البعد

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

قوانين التحريك الأساسية للجريانات وحيدة البعد (نظرية خيط التيار)

- لقد سبق التنويه الى أن دراسة الجريانات وحيدة البعد تعتمد على مفهوم **أنبوبة التيار**, التي يمكن أن تكون حدودها الخارجية وهمية (سائلية) أو حقيقية (صلبة).
- نفترض في الدراسة التحريكية :
  - ✓ أن شكل إنبوبة التيار معلوما , وبالتالي نعلم مسارات خطوط التيار, وخاصة مسار خط التيار المركزي s, الذي يكون شعاع السرعة للتيار الحجمي أو الكتلي مماسا عليه في كل نقطة.
  - ✓ تتحدد قيمة السرعة, التي تكون في الحالة العامة تابعة للزمان والمكان: $V = V(t,s)$ والتي يفرض أنها موزعة بانتظام على كامل أي مقطع متعامد مع s,

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = const \qquad (\rho = \rho(s) \neq const)$$

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = VA = const \qquad (\rho = const)$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة أويلر الحركية وحيدة البعد

- للتعرف على التأثير الكتلي داخل السائل الجاري نعتمد على مبدأ القطع فنحرر جزيئا يمثل قطعة صغيرة من أنبوبة التيار, ونطبق عليه **قانون نيوتن الاساسي للتحريك**: محصلة القوى تساوي جداء الكتلة في التسارع:

$$dF_K = dm.b \quad ; \quad \left(\boldsymbol{F_K}||\boldsymbol{b} = \frac{DV}{Dt}\right)$$

F_K تسمى القوة الحجمية الحركية, وكذلك قوة دالمبر

لأنه حسب مبدأ دالمبير يمكن إرجاع حركة الجزيء الحجمي الى مسألة توازن إذا طبقنا عليه قوة عطالة بعكس اتجاه حركته تساوي وتعاكس F_K

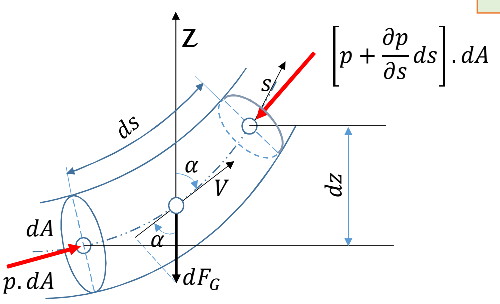
- في حالة سائل عديم الاحتكاك يخضع الجزيء الحجمي المعتبر لتأثير
  - ➢ القوى الحجمية الستاتيكية (الخارجية), كقوة الثقالة مثلاً
  - ➢ بالإضافة لتأثير القوى السطحية التي تنحصر بقوى الضغط الناظمية على السطح الخارجي للجزيء.

وحيث أن الضغط يمكن أن يتغير في اتجاه الجريان وناظمياً عليه: $p = p(s,n)$ فيلزم استخراج معادلة الحركة في هذين الاتجاهين

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة أويلر الحركية في اتجاه إتجاه الجريان

استخراج معادلة أويلر الحركية في اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة.



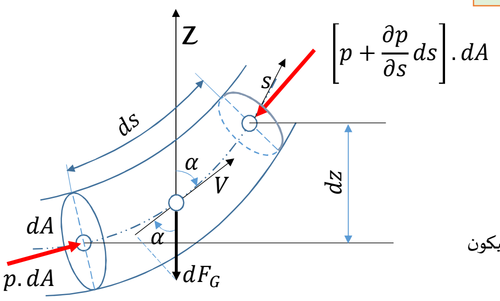
- نقتطع من أنبوبة تيار سائل ثقيل كثافته ρ جزيئا حجميا صغيرا مقطعه dA وطوله ds وكتلته: $dm = \rho dV = \rho\ dA\ ds$
- وليكن الاحداثي المنحني s موجبا في اتجاه الجريان والاحداثي الشاقولي z موجبا للاعلى, هذا الجزيء يخضع لتأثير قوة الثقالة وقوة الضغط
- بفرض أن g هو التسارع الأرضي, α الزاوية التي يشكلها s مع z, فتكون مركبة قوة الثقالة في اتجاه الجريان هي:

$$dF_{Gs} = -g.dm\cos\alpha = -g.\rho\ dA\ ds.\frac{\partial z}{\partial s}$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة أويلر الحركية في اتجاه إتجاه الجريان

استخراج معادلة أويلر الحركية في اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة.



- ان مساقط قوى الضغط الجانبية على المحور s تساوي الصفر.
- بالتالي تنتج محصلة قوى الضغط المؤثرة في إتجاه الجريان من القوتين المؤثرتين على قاعدتي الجزيء الحجمي السفلى والعليا:

$$dF_{ps} = p.dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dA = -\frac{\partial p}{\partial s} ds\, dA\,.$$

- نعتبر الحالة العامة التي تكون فيها السرع في اتجاه الجريان تتغير زمانيا ومكانيا, $V = V(t,s)$, فيكون التسارع المطبق على الجزيء هو التسارع المادي

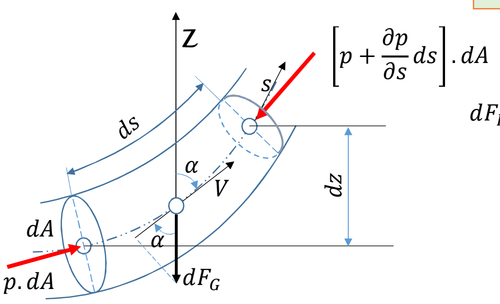
$$b_s = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}$$

- نطبق قانون نيوتين

$$dF_{Ks} = dF_{Gs} + dF_{ps} = -g\,\rho\, dA\, ds\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} ds\, dA = \rho\, dA\, ds\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}\right)$$

معادلة أويلر الحركية في اتجاه إتجاه الجريان

استخراج معادلة أويلر الحركية في اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة.



- نطبق قانون نيوتين

$$dF_{Ks} = dF_{Gs} + dF_{ps} = -g\,\rho\, dA\, ds\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} ds\, dA = \rho\, dA\, ds\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}\right)$$

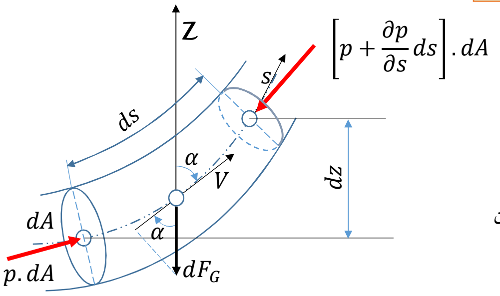
- أو بعد الاختصار على $\rho\, dA\, ds$ واجراء اصلاح بسيط:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\,\frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

- التي تمثل معادلة أويلر الحركية في إتجاه خط التيارلجريان وحيد البعد غير مستقر, قابل أو غير قابل للانضغاط.

معادلة أويلر الحركية في اتجاه إتجاه الجريان

استخراج معادلة أويلر الحركية في اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة.

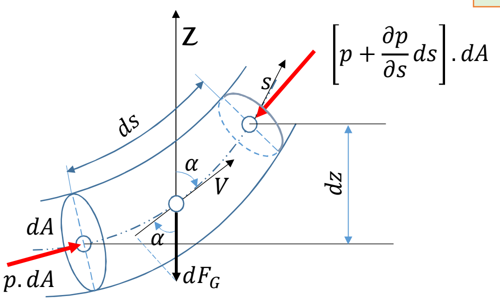


$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\,\frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

- التي تمثل معادلة أويلر الحركية في إتجاه خط التيارلجريان وحيد البعد غير مستقر, قابل أو غير قابل للانضغاط.
- تتضمن ثلاثة مجاهيل ρ, p, V كلها تابعة في الحالة العامة للزمان والمكان. وبالتالي يتطلب حلها معادلتين اضافيتين :
  - هما في حالة الجريانات القابلة للانضغاط $(\rho \neq const)$:
    1. معادلة الاستمرار $\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = const$
    2. معادلة الحالة : $\frac{p}{\rho} = RT$
- أما في حالة الجريانات غير القابلة للانضغاط $(\rho = const)$ فتحتوي على مجهولين ويلزمنا لحلها معادلة الاستمرار فقط.

معادلة أويلر الحركية في اتجاه إتجاه الجريان

استخراج معادلة أويلر الحركية في اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة.



$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\,\frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

- في حالة الجريانات المستقرة ينعدم التسارع المكاني $\partial V/\partial t$ وتصبح السرعة والضغط تابعين للمكان فقط, وبالتالي تتبسط معادلة اويلر الحركية وتأخذ الشكل التالي:

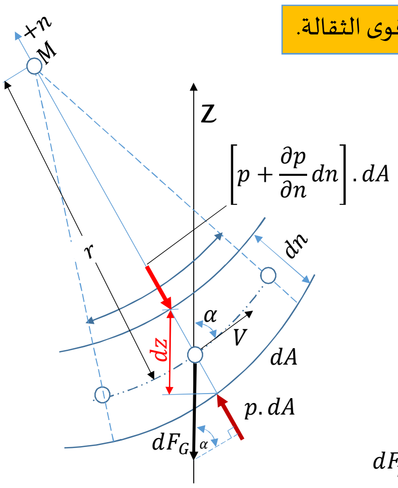
$$V\frac{dV}{ds} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} + g\,\frac{dz}{ds} = 0$$

- حيث أمكن كتابة المشتقات الجزئية كمشتقات عادية بسبب وجود متحول واحد فقط.

وظيفة : علل لماذا يمكننا ان نهمل تسارع الحمل في الغالبية العظمى من الجريانات العملية دون الوقوع في خطا يذكر؟!

معادلة أويلر الحركية ناظمياً على إتجاه الجريان

استخراج معادلة أويلر الحركية ناظميا على اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة.



- نعتبر جزيئا حجميا مقتطعا من أنبوبة تيار منحنية الجدران.
- نأخذ الاتجاه الموجب للناظم $+n$ في اتجاه مركز الانحناء M لمحور أنبوبة التيار,
- نأخذ المحور الشاقولي z موجباً للأعلى.
- ليكن r نصف قطر الانحناء المكاني لمحور الجزيء الحجمي, dA العنصر السطحي منه المتعامد مع n, dn ارتفاع الجزيء في اتجاه الناظم فتكون كتلته $dm = \rho\ .dA\ dn$
- بفرض α الزاوية التي يصنعها z مع محور أنبوبة التيار, فتكون **مركبة قوة الثقالة باتجاه الناظم**

$$dF_{Gn} = -g.\rho\ dA\ dn\ .\sin\alpha = -g.\rho\ dA\ dn.\frac{\partial z}{\partial n}$$

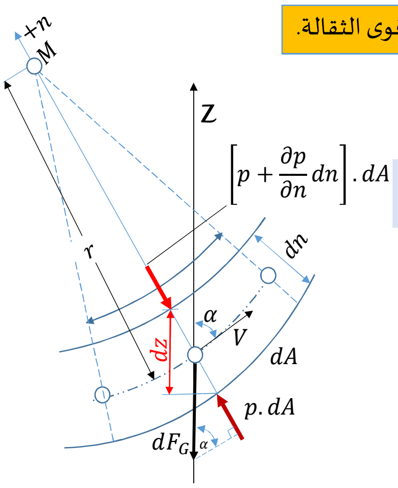
- وتنتج **محصلة قوى الضغط في الاتجاه الموجب للناظم** (مساقط كافة قوى الضغط الجانبية معدومة)

$$dF_{pn} = p.dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n} dn\right) dA = -\frac{\partial p}{\partial n} dn\ dA\ .$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة أويلر الحركية ناظمياً على إتجاه الجريان

استخراج معادلة أويلر الحركية ناظميا على اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة.



- أن التسارع في اتجاه الناظم هو التسارع النابذ $b_n = V^2/r = \omega^2 r$
- تنتج من تطبيق قانون نيوتن

$$dF_{Kn} = dF_{Gn} + dF_{pn} = -g\ \rho\ \frac{\partial z}{\partial n} dA\ dn - \frac{\partial p}{\partial n} dn\ dA = \frac{V^2}{r}.\rho\ dA\ dn$$

- بعد الاختصار على $\rho\ dA\ dn$ واجراء اصلاح بسيط:

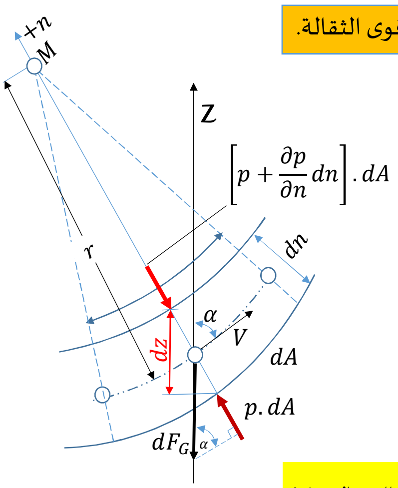
$$\frac{V^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0$$

- التي تمثل **معادلة اويلر الحركية ناظميا على خط التيار** لجريان وحيد البعد قابل أو غير قابل للانضغاط.
- وهي تسمح لنا بحساب تغير الضغط عند الانتقال بالاتجاه الناظمي من خط تيار لآخر.

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة أويلر الحركية ناظمياً على إتجاه الجريان

استخراج معادلة أويلر الحركية ناظميا على اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة.



$$\frac{V^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}+g\,\frac{\partial z}{\partial n}=0$$

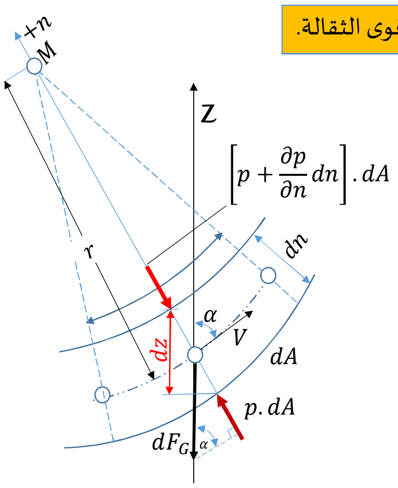
- لحلها معرفة توزع السرعة والضغط على طول خطوط التيار , وذلك بمساعدة معادلة الاستمرار والعلاقة استخرجناها في الفقرة السابقة
- في الحالة التي ينعدم فيها تأثير قوة الثقالة في اتجاه الناظم, كما هو الحال عندما يكون الجريان المعتبر واقعاً في مستو أفقي, فإن العلاقة السابقة تصبح من الشكل:

$$\frac{V^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

وظيفة : هل يمكننا اهمال التسارع الأرضي في حال كان التسارع النابذ أكبر بكثير منه؟! علل بمثال عملي!

معادلة أويلر الحركية ناظمياً على إتجاه الجريان

استخراج معادلة أويلر الحركية ناظميا على اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة.



عندما تكون خطوط التيار منحنية (مقوسة) فان الضغط في الاتجاه الناظمي عليها يتناقص في اتجاه مركز الانحناء, وينعدم تغير الضغط في اتجاه الناظم عندما تكون خطوط التيار مستقيمة $(r=\infty)$

- وعليه إذا اعتبرنا الجريان في كوع فان الضغط على جداره الخارجي يكون أكبر من الضغط على جداره الداخلي

معادلة برنولي

معادلة برنولي كتكامل لمعادلة اويلر الحركية

- نعتبر جريانا مستقرا غير قابل للانضغاط($\rho = const$) . في هذه الحالة يمكن كتابة معادلة اويلر الحركية

$$\frac{\rho}{2}\frac{d(V^2)}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g\,\frac{dz}{ds} = 0$$

- حيث تمثل كافة الحدود كسوراً تفاضلية بالنسبة لاتجاه الجريان s, ويمكن بالتالي مكاملتها بسهولة حداً حداً. وبذلك نجد العلاقة الهامة التالية:

$$\frac{\rho}{2}V^2 + p + \rho g\,z = C_{Bp} = const$$

- التي تعتبر بالنسبة لحركة سائل ثابت الحجم وعديم الاحتكاك العلاقة الاساسية التي تربط بين السرعة والضغط والوضعية المكانية لخط التيار المعتبر.
- وقد صاغها دانيال برنولي عام 1738, أي قبل أن يضع أويلر نظريته عن حركة السوائل المثالية.
- لذلك يطلق على هذه العلاقة بصيغها المختلفة اسم **معادلة برنولي**. كما يطلق على ثابت التكامل C_{Bp} اسم **ثابتة برنولي**.

معادلة برنولي

معادلة برنولي كتكامل لمعادلة اويلر الحركية

$$\frac{\rho}{2}V^2 + p + \rho g\,z = C_{Bp} = const$$

- معادلة برنولي تسمح بحساب الضغط في اتجاه الجريان. لذلك يطلق عليها أيضا معادلة الضغط. ويمكن بسهولة التأكدأن كل حد من حدود الطرف الأيسر له واحدة قياس الضغط $[N/cm^2]$ أو $[kp/cm^2]$.:

1. يسمى الحد الأول **الضغط التحريكي (الديناميكي)**. أو ضغط السرعة p_{dyn}, أو ضغط الركود $Stagnation\ pressure\ q$ ؛
2. يسمى الحد الثاني **الضغط الستاتيكي**
3. يسمى الحد الثالث **ضغط الثقالة** أو ضغط القوى الحجمية عامة.

معادلة برنولي للارتفاعات

معادلة برنولي كتكامل لمعادلة اولير الحركية

$$\frac{\rho}{2}V^2 + p + \rho g\, z = C_{Bp} = const$$

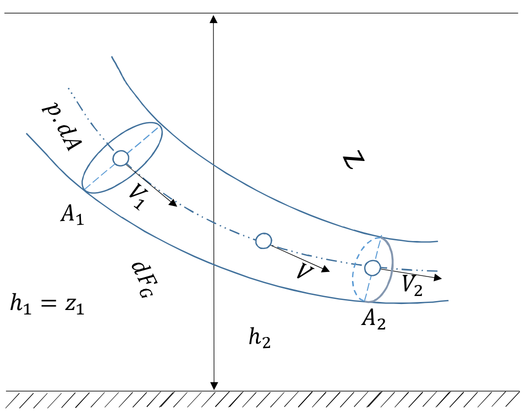
- نقسم على $\gamma = \rho g$ فتنتج العلاقة

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = C_{BH} = H = const$$

- التي تمثل **معادلة برنولي للارتفاعات**, لأن كل حد من حدود الطرف الأيسر له واحدة قياس الطول $[m]$.

1. يمثل الحد الأول $\frac{V^2}{2g}$ **ارتفاع السرعة** الذي تصل اليه نقطة مادية إذا قذفت شاقوليا للاعلى في حجرة خالية من الهواء بسرعة ابتدائية مقدار V .
2. يمثل الحد الثاني $\frac{p}{\gamma}$ **ارتفاع الضغط أو الضاغط** ويكافيء ارتفاع عمود سائل ساكن وزنه النوعي γ الذي يولد نتيجة ثقله الضغط p , وبالتالي فهو يكافئ ارتفاع صعود السائل في انبوب بيزومتري شاقولي.
3. يمثل الحد الثالث z **الارتفاع المكاني أو الهندسي** بالنسبة لأي مستوى قياس أفقي *Datum level* أو مستوى صفري يمكن إختياره لا على التعيين.

معادلة برنولي للارتفاعات



تمثيل بياني رمزي لمعادلة برنولي للارتفاعات. في الجريان المثالي يكون في كل نقطة من خط التيار مجموع الارتفاع المكاني وارتفاع الضغط وارتفاع السرعة ثابتا

معادلة برنولي للقدرة

معادلة برنولي كتكامل لمعادلة اويلر الحركية

$$\frac{\rho}{2}V^2 + p + \rho g\, z = C_{Bp} = const$$

- نقسم على ρ فتنتج العلاقة

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C_{BE} = const$$

التي يطلق عليها معادلة برنولي للقدرة، لأن كل حد من حدود الطرف الأيسر يمثل قدرة بالنسبة لواحدة الكتلة.

1. فالحد الأول يمثل القدرة الحركية
2. والثاني يمثل قدرة الضغط
3. والثالث يمثل القدرة الكامنة.

معادلة برنولي للقدرة

معادلة برنولي كتكامل لمعادلة اويلر الحركية

$$\frac{\rho}{2}V^2 + p + \rho g\, z = C_{Bp} = const$$

- نقسم على ρ فتنتج العلاقة

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C_{BE} = const$$

- وبالتالي يكون مجموع القدرات الثلاث في كل نقطة من خط التيار يساوي قيمة ثابتة C_{BE} تسمى القدرة الميكانيكية و قدرة الجريان.
- وعليه فان معادلة برنولي تعبر عن قانون انحفاظ القدرة الميكانيكية على طول خيط التيار. ويمكن على هذا الاساس اشتقاقها، اذا اعتبرنا مجموع القدرات في المقطعين A_1 ، A_2 من انبوبة التيار لا يتغير

معادلة برنولي للقدرة

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=C_{BE}=const$$

- إن ثبات قدرة الجريان على طول خيط تيار هو صفة مميزة للجريانات عديمة الاحتكاك. ل
- ذلك توصف بأنها جريانات " عديمة الفواقد" بمعنى أن " الخسارة" في القدرة الميكانيكية اثناء حركة السائل معدومة.
- أما في حالة الجريانات الحقيقة، فان قسما كبيراً أو صغيراً من هذه القدرة الميكانيكية " يفقده" السائل اثناء حركته ، لأنه يتحول بفعل الاحتكاك الى حرارة. ولذلك يطلق عليها **الجريانات " ذات الفواقد"**، ولا تنطبق عليها معادلة برنولي بصيغها الواردة أعلاه.
- قد مثلت الخسارة في قدرة الجريان بشكل ارتفاع الفواقد (Δh_v) ، الذي يساوي الفرق بين الارتفاع الهيدروليكي المثالي والارتفاع الهيدروليكي الحقيقي في النقطة 2 الواقعة في اتجاه الجريان بعد النقطة 1.
- بينما ينطبق خط القدرة المثالية *(IEL) Ideal Energy line* على المستقيم الافقي $\acute{n}-n$ ، ويمثل المستقيم الذي يصل في الحالة العامة بين نقاط النهاية للارتفاع الهيدروليكي الفعلي في النقاط المختلفة لخط التيار خط تدرج القدرة *(EGL) Energy grade line*.
- ونلاحظ بسهولة أنه يبعد عن خط تدرج الضغط مسافة شاقولية تعادل ارتفاع السرعة الفعلي (في الشكل (3.8) مقدار $\acute{h}_{v2}$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة برنولي للقدرة

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=C_{BE}=const$$

سؤال هام : ألا توجد حالات خاصة تكون فيها $C_B = const$ في كامل حقل الجريان ؟

- للأجابة نعتبر سائلاً" مهمل الثقالة"، وبالتالي ننطلق من معادلة أويلر البسيطة أو المختزلة التي بمكاملتها نحصل على معادلة برنولي المختزلة:

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}=C_{BE}$$

- نشتق هذه المعادلة جزئياً بالنسبة للناظم n، الذي نفرض اتجاهه الموجب هنا من الجهة المقعرة الى الجهة المحدبة لخط التيار

$$V\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}=\frac{\partial C_{BE}}{\partial n}$$

- نستعين بمعادلة أويلر التي تصبح هنا: $\frac{V^2}{2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$ وندخلها في العلاقة السابقة فتصبح $V\left(\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{V}{r}\right)=\frac{\partial C_{BE}}{\partial n}$

في الجريانات اللادورانية (الكمونية) لا تتغير قيمة ثابتة برنولي في كامل حقل الجريان، لأن قدرته الميكانيكية ثابتة في كل نقطة.

فإذا كانت C_{BE} متغيرة من خط تيار لآخر فيكون التفاضل $\partial C_{BE}/\partial n\neq 0$ وبالتالي فإن التعبير $\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{V}{r}\neq 0$ أيضا. فإذا لاحظنا أن التعبير يمثل شرط الخلو من الدوران بالنسبة لخط التيار المعتبر

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

معادلة برنولي العامة وحيدة البعد

- نعتبر سائلا باروتروبيا, $\rho = f(p)$, يخضع لتأثير حقل قوى حجمية تابع كمونه Φ_s. عندئذ تكون القوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة في اتجاه الجريان هي $-\partial\Phi_s/\partial s$, وتأخذ معادلة أويلر الحركية بإتجاه التيار في حالة جريان مستقر الصيغة التالية :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{V}^2)}{\partial s} + \frac{\partial p/\rho}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial s} = 0$$

- وباعتبار أن الكثافة تابعة للضغط فقط فيمكن كتابة الحد الثاني بالشكل:

$$\frac{\partial p/\rho}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\int \frac{\partial p}{\rho(p)} = \frac{\partial \mathbf{P}(p)}{\partial s}$$

حيث $\mathbf{P}(p)$ هو تابع الضغط. وبإدخاله وإجراء التكامل بالنسبة ل s تنتج العلاقة :

$$\frac{\boldsymbol{V}^2}{2} + \mathbf{P} + \Phi_s = C_B = const$$

لتي تعرف باسم معادلة برنولي العامة وحيدة البعد للجريانات المستقرة المتغيرة الحجم

وتأخذ في حالة الجريانات الثابتة الحجم ($\rho = const$) الصيغة التالية:

$$\frac{\boldsymbol{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi_s = C_B = const$$

التي تصبح في حالة كون حقل القوى ينحصر بحقل الجاذبية الأرضية, وبالتالي $\Phi_s \equiv \Phi_{sG} = g_z$ مطابقة لمعادلة برنولي

معادلة برنولي للجريانات غير المستقرة

- في حالة الجريانات غير المستقرة يكون التسارع المكاني $\partial V/\partial t \neq 0$, ويتغير شكل خطوط التيار وبالتالي أنبوبة التيار من لحظة الى أخرى.

- ننطلق من معادلة أويلر ونكتبها بالشكل التالي:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\boldsymbol{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

- إن التسارع المكاني يكون في الحالة العامة تابعا للمكان s, وبالتالي يمكن إجراء تكامل هذه العلاقة على طول خط تيار آني , أي في لحظة زمنية معينة , فتنتج العلاقة :

$$\frac{\boldsymbol{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz + \int_{s=0}^{s=s} \frac{\partial V}{\partial t} ds = C_B(t)$$

- التي تسمى **معادلة برنولي للجريانات الغير مستقرة** وغير القابلة للانضغاط
  - ➢ ويكون للحدود الثلاثة الأولى من الطرف الأيسر نفس المعنى الوارد لمثيلاتها في العلاقة السابقة , بينما يعبر الحد الرابع عن تغير الجريان مع الزمن .
  - ➢ ويكون لثابتة التكامل $C_B(t)$ مضمون ثابتة برنولي في لحظة زمنية معينة, ولكن قيمتها تتغير من لحظة لأخرى. وهذا يعني أن قدرة الجريانات غير المستقرة تتغير مع الزمن.

معادلة برنولي للجريانات غير المستقرة

- من أجل الحساب العملي لتغير الضغط والسرعة في اتجاه الجريان نعتبر نقطتين من خط التيار الآني . بحيث تكون النقطة 2 واقعة بعد 1 في اتجاه الجريان .

$$\frac{\boldsymbol{V}^2{}_1}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gz_1+\int_{s=0}^{s=s_1}\frac{\partial V}{\partial t}ds=\frac{\boldsymbol{V}^2{}_2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2+\int_{s=0}^{s=s_2}\frac{\partial V}{\partial t}ds$$

- وبعد إصلاح بسيط:

$$\frac{\boldsymbol{V}^2{}_1}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gz_1=\frac{\boldsymbol{V}^2{}_2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2+\int_{s=s_1}^{s=s_2}\frac{\partial V}{\partial t}ds$$

- وهذه صيغة أكثر ملاءمة للتطبيق العملي. فإذا وضعنا الطرف الأيسر مساويا C_{B1} ينتج:

$$C_{B1}=C_{B2}+\int_{s=s_1}^{s=s_2}\frac{\partial V}{\partial t}ds$$

- فإذا بقي مقطع انبوبة التيار ثابتا فإن التكامل في هذه العلاقة يصبح مساويا $\frac{\partial V}{\partial t}(s_2-s_1)=\frac{\partial V}{\partial t}\Delta s$

- وتأخذ بالتالي الشكل الأبسط التالي:

$$C_{B1}=C_{B2}+\frac{\partial V}{\partial t}\Delta s$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

وظيفة : س1.8 – س 3.8 –س8.5 –ت 1.8-ت 2.8

نهاية المحاضرة

أسئلة؟

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام